Università degli Studi di Genova
Ingegneria Meccanica
Misure e Strumentazione

MEASUREMENT LABORATORY

MISURE MEDIANTE OSSERVAZIONI RIPETUTE

Misure ripetute

Supponiamo di misurare una grandezza il cui valore rimanga costante nel tempo, ripetendo N volte la misurazione.
Otteniamo una serie di valori indicati dallo strumento,

$$\{y_i,\ i = 1,\ldots N\}$$

Che trasformiamo, grazie alla costante di taratura c, in una serie di misure:

$$\{\hat{x}_i = cy_i,\ i = 1,\ldots N\}$$

Ogni singola misura può, in linea di principio, essere fornita come risultato finale. Tuttavia, è meglio fornire come risultato finale il valor medio

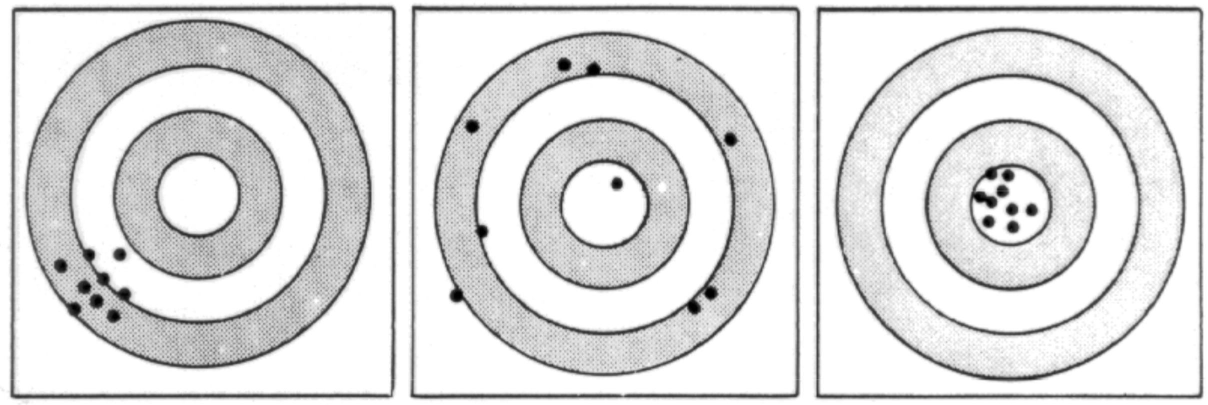
$$\hat{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\hat{x}_i.$$

Quale incertezza può essere assegnata a tale valore?

Scarti di natura casuale e scostamenti sistematici

Due categorie di sorgenti di incertezza:

- Scarti di natura casuale: variano ripetendo la misurazione (a breve termine)
- Scostamenti sistematici: restano costanti ripetendo la misurazione (a breve termine)



Modello per lo studio delle misure ripetute

- Per ogni singola misura si ha

$$\hat{x}_i = x + e_i$$

- Esplicitando lo scostamento sistematico (complessivo) e lo scarto di natura casuale (complessivo) alla i-esima osservazione

$$\hat{x}_i = x + s + w_i$$

- Ipotesi:
  - *s* costante
  - w_i sequenza di osservazioni indipendenti della variabile aleatoria *w*, dunque

$$\mathrm{E}(w_i) = 0, \ \mathrm{var}(w_i) = \sigma_w^2, \text{ per } i \neq j, \ \rho_{ij} = 0$$

Incertezza associata agli scarti di natura casuale

- Risulta

$$\hat{x} = x + s + \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} w_i = x + s + \bar{w}$$

- E quindi

$$\mathrm{var}\left[\bar{w}\right] = \mathrm{var}\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} w_i\right] = \mathrm{var}\left[\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{N} w_i\right] =$$

$$\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{N^2}\sigma_{w_i}{}^2 = \sum_{i=1}^{N}\frac{1}{N^2}\sigma_w{}^2 = \frac{N}{N^2}\sigma_w{}^2 = \frac{1}{N}\sigma_w{}^2$$

Incertezza complessiva

Anche la componente sistematica viene rappresentata mediante una variabile aleatoria (perché incognita, o perché riferita ad un contesto più ampio) e quindi l'incertezza della misura è

$$u = \sqrt{\sigma_s{}^2 + \frac{\sigma_w{}^2}{N}}$$

Valutazione *a posteriori* dell'incertezza

- La varianza stimata degli scarti di natura casuale può essere stimata mediante la varianza campionaria

$$\hat{\sigma}_w^{\,2} = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}\left(\hat{x}_i - \hat{x}\right)^2$$

- Dunque l'incertezza può essere valutata *a posteriori* (cioè dopo aver fatto le misure) mediante

$$u = \sqrt{\sigma_s^{\,2} + \frac{\hat{\sigma}_w^{\,2}}{N}}$$

Incertezza Estesa

Incertezza estesa (*expanded uncertainty*), U:

semiampiezza di un intervallo simmetrico, centrato sul valore di misura, avente una specificata probabilità di contenere il valore del misurando

La misura è espressa nel modo seguente

$$x = \left(\hat{x} \pm U \right) \; \textit{unità di misura, a livello di copertura } p_0$$

Modello per il calcolo dell' incertezza estesa

Ricordiamo che $\hat{x} = x + e$, essendo e una variabile aleatoria a valor atteso nullo. Definiamo dunque U mediante la formula:

$$\int_{-U}^{U} p(e)de = p_0$$

si può verificare che l'intervallo $(\hat{x} - U, \hat{x} + U)$ contiene, con probabilità p_0 , il valore del misurando x. Infatti:

$$P(\hat{x} - U \leq x \leq \hat{x} + U) = P(x - U \leq \hat{x} \leq x + U) =$$

$$= P(-U \leq e \leq U) = \int_{-U}^{+U} p(e)de = p_0$$

Procedimento approssimato (Metodo di Welch Satterwaite).

Ipotesi: approssimazione gaussiana dell'errore.

Si calcola dapprima l'incertezza standard, u, e si esprime l'incertezza estesa come

$$U = k\,u$$

ove *k*, *fattore di copertura,* dipende

- dal *livello di copertura* richiesto p_0
- dal *numero dei gradi di libertà* ν con cui è stata valutata l'incertezza standard.

Procedura per il calcolo del fattore di copertura *k*

- Si valutano i gradi di libertà delle singole variabili che contribuiscono all'incertezza di misura, ν_i, distinguendo due casi, A e B
- Si calcola il numero di gradi di libertà complessivo, ν, mediante
- Si determina *k*, in funzione del livello di copertura p_0 e del numero di gradi di libertà ν (vedi Tabella).

$$\nu = \frac{u^4}{\sum_{i=1}^{m} \frac{u_i^4}{\nu_i}}$$

Tabella per il calcolo del fattore di copertura

gradi di libertà	livello di copertura 95%	livello di copertura 99%
1	12,71	63,66
2	4,30	9,92
3	3,18	5,84
4	2,78	4,60
5	2,57	4,03
6	2,45	3,71
7	2,36	3,50
8	2,31	3,36
9	2,26	3,25
10	2,23	3,17
11	2,20	3,11
12	2,18	3,05
13	2,16	3,01
14	2,14	2,98
15	2,13	2,95
16	2,12	2,92
17	2,11	2,90
18	2,10	2,88
19	2,09	2,86
20	2,09	2,85
25	2,06	2,79
30	2,04	2,75
35	2,03	2,72
40	2,02	2,70
45	2,01	2,69
50	2,01	2,68
100	1,984	2,628
infiniti	1,960	2,576

Calcolo dei gradi di libertà delle singole componenti

- Caso A: Nel caso di una componente stimata sulla base di N osservazioni
  $\nu = N - n_p$
  ove n_p è il numero di parametri che è necessario stimare preliminarmente.
- Caso B: nel caso di una componente ottenuta da informazioni del costruttore, in genere si assumono infiniti gradi di libertà (informazione pienamente attendibile)

Esempio: misure ripetute di deformazione

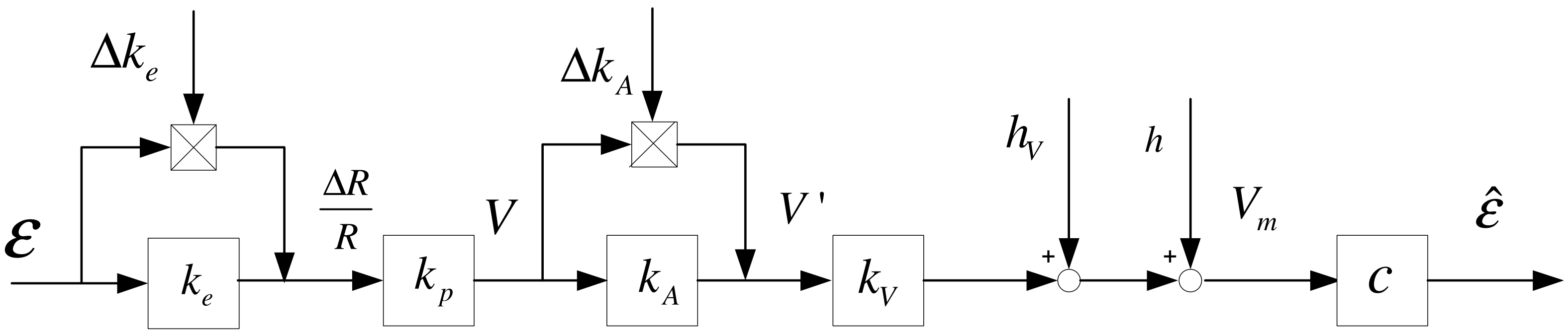
Supponiamo di effettuare misure ripetute, caricando e scaricando ripetutamente lo stesso provino, sul quale è stato installato l'estensimetro, utilizzando la catena estensimetrica precedentemente studiata.

Supponiamo di ripetere $N = 5$ volte la prova, ottenendo i seguenti risultati (espressi in mV):

9,7 11,5 10,6 9,1 8,7

Si vuole determinare il risultato finale, l'incertezza standard e l'incertezza estesa

Schema a blocchi



Calcoli preliminari

$$\bar{y} = 9{,}92\ \text{mV}$$

$$\hat{\varepsilon} = c\bar{y} = 39{,}7\ \frac{\mu\text{m}}{\text{m}}$$

$$\hat{\sigma}_h = 1{,}14\ \text{mV}$$

Tabella per la valutazione dell'incertezza

N	Grandezza di ingresso	Incertezza standard	Unità misura	Sensibilità	Unità misura	Incertezza rif. misurando	G.d.l.
1	Sensibilità estensimetro	0,00577	1	39,7	$\frac{\mu m}{m}$	0,228	∞
2	Guadagno voltmetro	0,00577	1	39,7	$\frac{\mu m}{m}$	0,228	∞
3	Rumore mediato	0,510	mV	4	$\frac{\frac{\mu m}{m}}{mV}$	2,04	4
4	Incertezza voltmetro	0,577	mV	4	$\frac{\frac{\mu m}{m}}{mV}$	2,31	∞
						u = 3,1	$\nu = 21$
						U = 6,5	

Calcolo dell'incertezza estesa e risultato finale

Risulta:

$$\nu = \left(\frac{u}{u_3}\right)^4 \nu_2 = \left(\frac{3,1}{2,04}\right)^4 4 = 21$$

Per cui $k = 2,09$, $U = 6,5$.

Il risultato finale è

$$\varepsilon = 40\frac{\mu m}{m} \quad con\ incertezza\ standard\ pari\ a\ 3\frac{\mu m}{m},$$

oppure

$$\varepsilon = (40 \pm 7)\frac{\mu m}{m}$$